感受率の固有モード解析によるスピングラスの研究(高次元位相空間の分布とダイナミクスの解析法,1998年度後期基礎物理学研究所研究会「モンテカルロ法の新展開」,研究会報告)

根本, 幸児

感受率の固有モード解析によるスピングラスの研究*

北大院・理・物理　根本幸児

スピングラスは，強磁性相互作用と反強磁性相互作用がランダムに混在した磁性体である。このとき一般に，相互作用の競合（フラストレーション）によって，相互作用を全て満足することができない効果が存在し，これもまた空間的にランダムに分布する。このフラストレーションの存在により，低温でスピンがランダムな方向に揃った相をスピングラス相と呼ぶ。

スピングラスの特徴の1つに，常磁性相においてもスピンの時間相関が，通常の指数関数緩和と比べて長い緩和を示すなどの特異な現象が見られることがある。同じランダムスピン系である希釈強磁性体においても，Griffiths 相と呼ばれる温度領域 [1] で長緩和現象が見られており，それとの類推からスピングラスにおいても Griffiths 相の存在の可能性が指摘されているものの，まだその存在は確かめられてはいない。Griffiths 相においては巨視的なオーダーパラメーターが無く，空間相関行列の固有値分布の解析が，その存在を明らかにする現在知られる唯一の方法である。本研究では，モンテカルロシミュレーションを用いて static なスピンの空間相関行列を求め，その固有値分布を調べることによって，スピングラスに Griffiths 相が存在するかどうかについての証拠を引き出すことを目的とする。

希釈強磁性体は，イジングモデルのハミルトニアン:

$$\mathcal{H} = -\sum_{(ij)} J_{ij} S_i S_j \qquad (S_i = \pm 1) \tag{1}$$

において，相互作用 J_{ij} が確率 p で $J(>0)$，確率 $1-p$ で 0 をとるとするモデルで記述できる。$p=1$ では通常の強磁性体のモデルになり，ある温度 T_c^{pure} で強磁性相転移が起こる。p が小さくなっていくと相転移点 T_c が下がっていき，ある $p=p_c$ で $T_c=0$ になる。常磁性相の中の特に $T_c < T < T_c^{\mathrm{pure}}$ の温度領域では，相転移を引き起こす程の長距離秩序は生じていないが，有限である限りどんなに大きいクラスターも有限の確率で存在する。ここでいうクラスターとは，希釈強磁性体ではボンドのほぼ満たされた領域である。$T_c < T < T_c^{\mathrm{pure}}$ では，クラスター内部では強磁性相関が発達していて，ごく弱い外部磁場 H に対しても強く反応する。このような，任意に大きいクラスターの H への反応の効果を厳密に検討した結果，Griffiths は $T < T_G (= T_c^{\mathrm{pure}})$ では p によらず磁化が H の関数として $H \to 0$ で弱い特異性を持っていることを証明した [1]。また，任意に大きいクラスターの存在はダイナミクスにも影響し，異常長緩和が定性的な議論によって導かれ，実際に観測されている（本研究会高野氏の報告参照）。そこで，$H=0$ での $T < T_G$ の常磁性相を Griffiths 相と呼び，この温度領域で見られる上のような異常性を Griffiths 異常性と呼ぶ（T_G を Griffiths 温度と呼ぶことにする）。

一方，Bray と Moore は，常磁性相における static な相関行列の逆行列の固有値分布の温度変化を定性的に調べて，Griffiths 相との関係を議論した [2]（図1参照）。相関行列 $\hat{C}$ の ij 成分 C_{ij} は次のように定義される（$\langle\ \ \rangle$ は熱平均）：

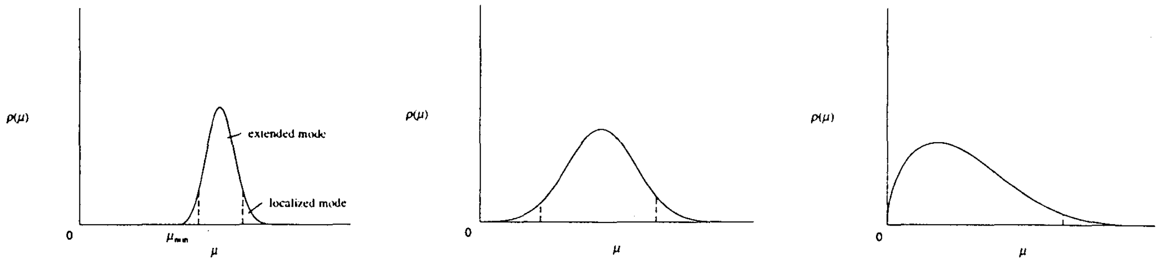
$$C_{ij} \equiv \langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle. \tag{2}$$

*この発表は山田定徳氏（現 NTT）との共同研究に基づく。

但し，今は常磁性相を考えているので，右辺の第2項は0である。$\hat{C}$ に $\beta = (k_{\rm B}T)^{-1}$ ($k_{\rm B}$ はBoltzmann定数）をかけると感受率行列になるから，その逆行列 $\hat{C}^{-1}$ の固有値 μ は物理的に0または正でなければならない。十分高温では，$\rho(\mu)$ の下限 $\mu_{\rm min}$ は有限の値を持つ。温度が下がっていくと，だんだん $\mu_{\rm min}$ が0に近付いていって，ある温度で0になる。彼らはその温度をGriffiths温度 $T_{\rm G}$ であるとした。但し，$\mu_{\rm min}$ に対応する固有モードは空間的に局所化している localized mode であって，巨視的な相転移は起きていない。さらに温度が下がり，localized mode と extended mode を分ける境目が0に近付いていって，0に到達する（$\mu_{\rm min}$ に対応する固有モードが extended mode になる）温度が相転移点 $T_{\rm c}$ である。また，Brayは，Griffiths相におけるクラスターの分布の議論から，$\rho(\mu)$ の $\mu \to 0$ の関数形が，

$$\rho(\mu) \sim \exp\Bigl(-\frac{A}{\mu}\Bigr) \tag{3}$$

であると結論した[3]。



$T > T_{\rm G}$ $\quad$ $T = T_{\rm G}\ (\mu_{\rm min} \to 0)$ $\quad$ $T = T_{\rm c}$

図1：$\rho(\mu)$ の温度変化の概形

このような，Griffiths相に対する相関行列の固有値分布の議論をスピングラスに適用し，それが成り立つかどうかによってGriffiths相の存在の有無を確かめることにした。そのため，2次元 $\pm J$ イジングモデルにおいて，相関行列をシミュレーションで計算し，その逆行列の固有値分布を求めた。2次元 $\pm J$ イジングモデルは，(1)式の J_{ij} が，確率 p で $J(>0)$，確率 $1-p$ で $-J$ をとるモデルである。相図は図2のようになり，有限温度でのスピングラス相への相転移はないと考えられている。シミュレーションに用いたのは $p = 0.5$ のもので，測定温度領域は $T_{\rm c}^{\rm pure}(\simeq 2.27)$ を含むように $0.8 \le T \le 3.5$ ととった。リニアサイズは $L = 12, 16, 20, 24, 28$ で，サンプル数はそれぞれ 1500,900,600,2750,2000 である。まず，得られた固有値分布 $\rho(\mu)$ の $\mu \ll 1$ のデータを

$$\rho(\mu) \sim \begin{cases} (\mu - \mu_{\rm min})^x, & \text{高温側} \\ \exp\Bigl(-\dfrac{a}{\mu}\Bigr), & \text{低温側} \end{cases} \tag{4}$$

という関数形でフィッティングさせた。$\mu_{\rm min}$ の温度変化は図2に示すように，$T \sim 1.5$ の辺りで0になった。それに対応して x の方は図3のように高温でのほぼ一定値から $T \sim 1.5$ で発散していく。また，a の温度依存性は図2のように $T \sim 1.5$ に向けて大きくなっていき，フィッティングが破綻していることがわかる。一方，サンプルごとの最小固有値 $\mu^J_{\rm min}$ に対応するモードの空間的な広がりの程度を表す participation ratio のサンプル平均の L 依存性:

$$[PR(\mu^J_{\rm min})]_J \xrightarrow{L\to\infty} L^{-\alpha(T)} \tag{5}$$

の α は図 4 のようになり，同様に $T \sim 1.5$ で弱い異常性が見られた。

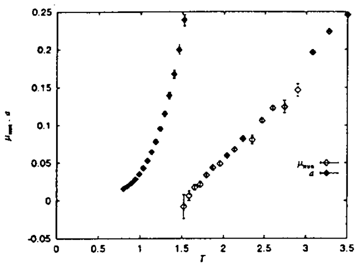


図 2 ：$\mu_{\rm min}, a$ の温度依存性

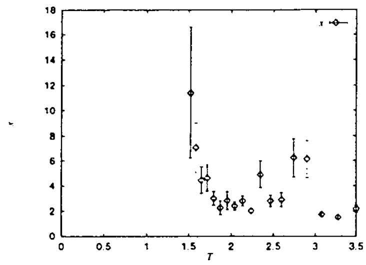


図 3 ：x の温度依存性

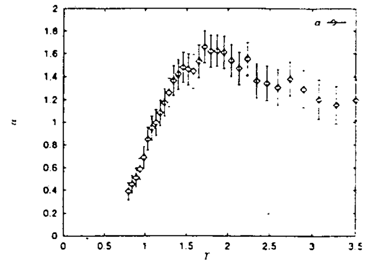


図 4 ：α の温度依存性

以上の固有値分布の解析から，Bray–Moore の議論がこのモデルにおいても成り立っていることが示され，スピングラスにおいても Griffiths 相が存在していることを static な解析から初めて示す結果になった。

また，固有値分布と participation ratio の解析より，このモデルにおいては，$T_{\rm G} \sim 1.5$ となると思われる。希釈強磁性体においては $T_{\rm G}$ は $T_{\rm c}^{\rm pure}$ に等しいことが示されているが，このモデルでは $T_{\rm c}^{\rm pure} \simeq 2.27$ であり，$T_{\rm G} < T_{\rm c}^{\rm pure}$ となっている。

この原因としては，次のように考えることができる。

希釈強磁性体ではクラスターはボンドのつながった領域であり，クラスター間には相互作用がない。それは，そのまま相関行列に反映され，$\mu \to \mu_{\rm min}$ のモードはクラスターに局在したモードになる。一方，スピングラスにおいても，$\mu \to \mu_{\rm min}$ のモードは空間的に局在したモードであるが，そのモード間には相互作用があり，その結果として $T_{\rm G}$ を下げていると考えられる。

今回のシミュレーションは，スピン数の 2 乗の計算のため，比較的小さい系までしかできなかった。より大きな系での結果との比較をしなければならない。また，この static な性質の結果と動的な性質との関係を調べる必要があり，今後の課題として残されている。

参考文献

[1] R. B. Griffiths. *Phys. Rev. Lett.*, **23** (1969) 17.

[2] A. J. Bray and M. A. Moore. *J. Phys.*, **C15** (1982) L765.

[3] A. J. Bray. *Phys. Rev. Lett.*, **59** (1987) 586.